

PROCESSI STOCASTICI

7/03/2012

PROGRAMMA : - RICHIAMI
- SPERANZA CONDIZIONATA
- MARTINGALE (PROCESSI)
- MOTO BROWNIANO

$$\begin{cases} \leq 1/4 \\ \geq 1/2 \\ \sim 1/4 \end{cases}$$

1. RICHIAMI

$$(\Omega, \mathcal{A}, P) = (\underbrace{\Omega}_{\text{INSIEME}}, \underbrace{\mathcal{A}}_{\substack{\sigma\text{-ALGEBRA} \\ \text{SU } \Omega}}, \underbrace{P}_{\text{PROBABILITA'}}) = \text{SPAZIO di PROBABILITA'}$$

Ricordiamo che una **σ -ALGEBRA** è una famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ che contiene \emptyset, Ω e stabile per passaggio al complementare e per unioni numerabili.

(Ω, \mathcal{A}) si dice **SPAZIO MISURABILE**. $P: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ tale che $P(\emptyset) = 0$
 $P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n) \quad \forall A_n, A_n \subseteq \mathcal{A}$
 $A_n \cap A_m = \emptyset, P(\Omega) = 1$

PROPRIETA' di una PROBABILITA'

- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- $\forall A, B \text{ t.c. } A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- $\forall \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \quad P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$ SUBADDITIVITA'
- Se $A_n \uparrow A$ (cioè $A_n \subseteq A_{n+1} \forall n$ e $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$) $\Rightarrow P(A_n) \uparrow P(A)$
- Se $A_n \downarrow A$ (cioè $A_n \supseteq A_{n+1} \forall n$ e $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$) $\Rightarrow P(A_n) \downarrow P(A)$
- Se $P(A_n) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow P(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = 1$
 dim: si dimostra che $P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c) = 0$ usando la subaddittività
 si ottiene la tesi
- Se $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una partizione quasi certa di Ω allora $\forall A$
 $P(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A \cap B_n)$

$\{B_n\}$ è una **PARTIZIONE QUASI CERTA** di Ω se $P(B_n \cap B_m) = 0 \quad \forall n \neq m$
 $P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) = 1$

Sia Ω un insieme e $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ovvero una famiglia qualunque di sottoinsiemi. Si definisce **$\sigma(\mathcal{I})$** la più piccola σ -algebra su Ω che contenga \mathcal{I} .

$$\sigma(\mathcal{I}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{G} \text{ } \sigma\text{-algebra su } \Omega \\ \mathcal{I} \subseteq \mathcal{G}}}$$

N.B. L'intersezione di σ -algebre è ancora una σ -algebra (l'intersezione qualunque)
 L'intersezione è non vuota perché $\mathcal{P}(\Omega)$ (insieme delle parti) è una σ -algebra che contiene \mathcal{I}

def: Dato Ω insieme, $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, \mathcal{A} σ -algebra su Ω si dice che \mathcal{I} è un **GENERATORE** di \mathcal{A} se $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{I})$. \mathcal{I} si dice **BASE** di \mathcal{A} se \mathcal{I} è un generatore di \mathcal{A} chiuso per intersezione finita.

TEO: Sia (Ω, \mathcal{A}) sp. misurabile. Sia \mathcal{I} una base di \mathcal{A} . Siano P, P' probabilità su (Ω, \mathcal{A}) . Se P e P' coincidono su \mathcal{I} (cioè $P(A) = P'(A) \quad \forall A \in \mathcal{I}$)
 $\Rightarrow P = P'$

Sia (E, \mathcal{C}) sp. Topologico. Si definisce su E la **σ -ALGEBRA BORELIANA**: $\mathcal{B}(E) = \sigma(\mathcal{C})$

In questo modo tutti gli insiemi aperti sono misurabili.

CASO PARTIC. $E = \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\text{APERTI})$

Gli aperti sono generatori per i Boreliani ma sono anche una base (perché sono chiusi per intersezioni finite)

Si può mostrare che $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\text{CHUSI}) = \sigma(\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}) = \sigma(\{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\})$
Quindi anche le semirette sono una base.

(da questo segue che se due v.c. hanno la stessa funzione di ripartizione sono uguali)

ESEMPIO: $A \subseteq \mathbb{R}$ insieme $\Rightarrow \sigma(A) = \{\emptyset, A, A^c, \mathbb{R}\}$

ESEMPIO: $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ partizione di \mathbb{R} , $A_n \cap A_m = \emptyset$ se $n \neq m$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}$
 $\Rightarrow \sigma(\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}) = \left\{ \bigcup_{j \in J} A_j : J \subseteq \mathbb{N} \right\}$

ESERCIZIO: $\mathbb{R} = \mathbb{R}$, $I = \{(-a, a) : a \in \mathbb{R}^+\}$
 $\Rightarrow \sigma(I) = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \text{c.e. } x \in A \Rightarrow -x \in A\}$

def: Dati (Ω, \mathcal{A}) e (E, \mathcal{E}) sp. misurabili. Una funzione $X: \Omega \rightarrow E$ si dice **MISURABILE** se $X^{-1}(E) \subseteq \mathcal{A}$, cioè $X^{-1}(B) \in \mathcal{A} \forall B \in \mathcal{E}$.
Se su (Ω, \mathcal{A}) c'è una probabilità P , le funzioni misurabili X si dicono **VARIABILI ALGEBRAICHE**.

NOTAZ: se $X: \Omega \rightarrow E$ funzione, $\forall B \in \mathcal{E}$ scriveremo

$$\{X \in B\} = X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$$

def: Sia $X: \Omega \rightarrow E$ e sia \mathcal{E} una σ -algebra su E . Si definisce **σ -ALGEBRA GENERATA da X** la σ -algebra su Ω definita da

$$\sigma(X) = X^{-1}(\mathcal{E}) = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{E}\} = \{\{X \in B\} : B \in \mathcal{E}\}$$

OSS: $X: (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ è misurabile $\Leftrightarrow \sigma(X) \subseteq \mathcal{A}$

X in realtà è $X: \Omega \rightarrow E$ ma scriviamo così per ricordarci delle σ -ALGEBRE

Quindi $\sigma(X)$ è la più piccola σ -algebra su Ω che renda misurabile X .

OSS: $\sigma(X)$ è una σ -algebra che codifica l'informazione contenuta in X . Più precisamente essa consta degli eventi di Ω che si possono "esprimere tramite" X . Cioè si può decidere se $\omega \in A$ $\forall \omega \in \Omega$ semplicemente conoscendo $X(\omega)$.

$$A \in \sigma(X) \Leftrightarrow A = \{X \in B\} \text{ per qualche } B \in \mathcal{E} \\ = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$$

Quindi per capire se $\omega \in A$ basta sapere se $X(\omega) \in B$!
(questo non è vero in generale! è vero in $\sigma(X)$)

ESEMPIO: Lancio di 2 dadi

$$\Omega = \{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, 6\} = \{(i, j) : i, j \in \{1, \dots, 6\}\} \quad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$$

$$X = \text{Somma dei due dadi} \rightarrow X: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ (i, j) \mapsto i + j$$

$$\sigma(X) = ?$$

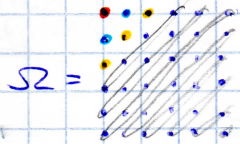
$$\sigma(x) = \{\{x \in B\} : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} = \{\{x \in B\} : B \in \{2, 3, \dots, 12\}\} \\ = \{\omega \in \Omega : x(\omega) \in B\}$$

Facciamo un po' di prove:

$$A = \{(1, 3)\} \Rightarrow A \in \sigma(x) \text{ infatti } A = x^{-1}(\{2\})$$

$$A = \{(1, 2)\} \Rightarrow A \notin \sigma(x) \text{ perché "manca } (2, 1) \text{ per scrivere } A = x^{-1}(B) \text{ con } B \subseteq \{2, 3, \dots, 12\} \\ \Rightarrow B \ni \{3\} \text{ ma allora } (2, 1) \text{ deve essere in } A$$

$$A \in \sigma(x) \Rightarrow \text{se } \omega_1 \in A \text{ allora } \omega_2 \in A \quad \forall \omega_2 \text{ t.c. } x(\omega_2) = x(\omega_1)$$



$\Omega =$ tutti questi insiemi sono contenuti in $\sigma(x)$ e poi ci sono le loro unioni...

Dato Ω insieme, $A \subseteq \Omega$ definiamo l'**INDICATRICE** di A : $1_A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in A \\ 0 & \text{se } \omega \notin A \end{cases}$$

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sp. di probabilità. Sia $x: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ v.a. reale, e ben definito $\mathbb{E}(x) = \int x d\mathbb{P} \in [0, +\infty]$

(Si parte con $x = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$ $a_i \in [0, \infty)$, $A_i \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbb{E}(x) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{P}(A_i)$ e poi si passa al limite per funzioni non semplici)

Se $x: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ allora $x^+: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ $x^-: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ v.c.

\Rightarrow sono ben definiti $\mathbb{E}(x^+) \in [0, +\infty]$ e $\mathbb{E}(x^-) \in [0, +\infty]$. Se non sono entrambi $+\infty$ è ben definito $\mathbb{E}(x) = \mathbb{E}(x^+) - \mathbb{E}(x^-) \in (-\infty, +\infty]$.

Se entrambi sono finiti si dice che $x \in L^1$, x è integrabile e $\mathbb{E}(x) \in (-\infty, +\infty)$.

$$\text{OSS: } |x| = x^+ + x^- \Rightarrow \mathbb{E}(|x|) = \mathbb{E}(x^+) + \mathbb{E}(x^-) < +\infty \text{ se } \mathbb{E}(x^+) \text{ e } \mathbb{E}(x^-) < +\infty$$

$$\Rightarrow L^1 = L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = \{x: (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \text{ v.c. t.c. } \mathbb{E}(|x|) < +\infty\}$$

def: Per $p \in [1, \infty)$ si definisce $L^p = \{x: (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \text{ v.c. t.c. } \mathbb{E}(|x|^p) < +\infty\}$

Si definisce: $\|x\|_p = \mathbb{E}(|x|^p)^{1/p} \quad \forall x \text{ v.c. reale}$

Si dimostra che $\|\cdot\|_p$ è una seminorma, ovvero: $\begin{cases} \|x\|_p \geq 0 \\ \|\lambda x\|_p = |\lambda| \|x\|_p \\ \|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \end{cases}$

OSS: $\forall p > p' \quad L^{p'} \subseteq L^p$ perché lo sp. è di misura finita (è di probabilità quindi ha misura 1). Infatti: $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x|^p \leq |x|^{p'} + 1$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(|x|^p) \leq \mathbb{E}(|x|^{p'}) + \mathbb{P}(\Omega) \\ \stackrel{1}{1} < +\infty$$

Quindi in particolare $L^2 \subseteq L^1$.

def: $\forall x \in L^2$ si definisce la **VARIANZA**: $\text{Var}(x) = \mathbb{E}(x^2) - \mathbb{E}(x)^2 = \mathbb{E}((x - \mathbb{E}(x))^2)$

def: Siano x, y v.c. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $x, y, xy \in L^1$. Allora si definisce la **COVARIANZA**: $\text{Cov}(x, y) = \mathbb{E}(xy) - \mathbb{E}(x)\mathbb{E}(y) = \mathbb{E}((x - \mathbb{E}(x))(y - \mathbb{E}(y)))$

Osserviamo che $\text{Var}(x) = \text{Cov}(x, x)$.

Osserviamo che se $x, y \in L^2$ allora $x, y, xy \in L^1$. Dato che $L^2 \subseteq L^1$ e poi $\mathbb{E}(|xy|) \leq \frac{1}{2} \mathbb{E}(|x|^2 + |y|^2)$ (da Young)

DISUGUAGLIANZA di MARKOV:

Se $X \geq 0$ v.a., $\forall t > 0$ $P(X \geq t) \leq \frac{E(X)}{t}$

dim: $t \cdot 1_{\{x > t\}} \leq X$ @ (disg. tra. funzioni $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$)

Integrando otteniamo la tesi.

Mostriamo \circledast avere che $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ (w) $\leq X(w)$

Se $w \notin L_{\geq t}$ e' ovvio perche' $0 \leq X(w) \leq n$

se $\omega \notin \{X \geq t\}$ è ovvio perché $0 \leq X(\omega) < t$
 se $\omega \in \{X \geq t\} \Rightarrow X(\omega) \geq t$ di dato che $1_{\{X \geq t\}}(\omega) = 1$

DISUGUAGLIANZA di CHEBYCHEV:

$$\forall X \text{ v.a. in } L^2, \forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}$$

ESERCIZIO: Sia X v.c. ≥ 0 t.c. $\mathbb{E}(X) = 0 \Rightarrow X = 0$ q.c.
(cioè $P(X=0) = 1$)

(a) Basta mostrare che $\forall t > 0 \quad P(X \geq t) = 0$

Da markov $\Rightarrow P(X \geq t) \leq \frac{0}{t} = 0 \Rightarrow P(X \geq t) = 0$ se $t > 0$

mostriamo A)

$$P(X=0)=1 \Leftrightarrow P(X \neq 0)=0$$

$$P(X \neq 0) = P(X > 0) \cup P(X < 0)$$

Basta mostrare che $\mathbb{P}(X > 0) = 0$

$$\{x > 0\} = \bigcup_{t > 0} \{x \geq t\} = \bigcup_{t > 0} \bigcap_{t \leq t' < \infty} \{x \geq t'\}$$

$$P(X > 0) \leq \sum_{t=0}^{\infty} P(X \geq t) = 0 \Rightarrow P(X > 0) = 0$$

CORO: $X \in L^2$, $\text{Var}(X) = 0 \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $X = c$ q.c.

$$\text{denn: } \text{Var}(X) = E((X - E(X))^2) = 0 \Rightarrow (X - E(X))^2 = 0 \text{ q.e.}$$

$$(X(\omega) - E(X))^2 = 0 \quad \text{per } \forall \omega \in \Omega$$

$$\Rightarrow X(\omega) = E(X) \text{ per q.o. } \omega \in \Omega$$

TEO: (CONVERGENZA MONOTONA)

⊛ Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sp. probabile, siano $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ v.a. reali.

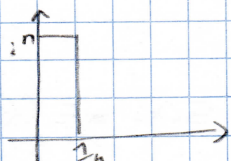
Se $0 \leq X_n \uparrow X$ q.c. (ovvero per p.p. w.e. $0 \leq X_n(\omega) \leq X_{n+1}(\omega)$ t.n.e. e $X_n(\omega) \uparrow X(\omega)$)

allora

$$E(X_n) \uparrow E(X)$$

LEMMA: (FATOU) So $X_n \geq 0$ q.c. $\forall n$ $E(\liminf X_n) \leq \liminf E(X_n)$

ESEMPIO



$$E(\lim x_n) = E(0) = 0$$

$$\lim (E(X_n)) = \lim(1) = 1$$

TEO : (CONVERGENZA DOMINATA)

Se $X_n \rightarrow X$ q.c. e se \exists v.c. Y t.c. $|X_n| \leq Y$ e $Y \in L^1$

$$\Rightarrow E(X_n) \rightarrow E(X)$$

def: Sia $X: (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ v.a. Essa determina una probabilità μ_X su (E, \mathcal{E}) detta **LEGGE di X** definita da: (o MISURA IMMAGINE)

$$\mu_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)) \quad \forall B \in \mathcal{E}$$

Ai fini di calcolare probabilità e valori attesi che coinvolgono X è sufficiente conoscere la legge.

TEO: (di passaggio alla misura immagine)

Sia $X: (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ v.a. Sia $g: (E, \mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{R}$ funzione misurabile ≥ 0

Allora:

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_E g(x) d\mu_X(x)$$

Se g non è ≥ 0 la formula vale per $|g|$ e se i membri sono finiti la formula vale per g

(2)

9/03/2012

Caso tipico: $E = \mathbb{R}^d$, quindi ci riduciamo a fare integrali rispetto a misure su \mathbb{R}^d

Come sono fatte le misure μ su $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$?

(1) **MISURE DISCRETE**: $\exists \{x_i\}_{i \in I}, \{c_i\}_{i \in I}, x_i \in \mathbb{R}^d, c_i \in (0, \infty) \text{ t.c.}$

$$\Rightarrow \mu = \sum_{i \in I} c_i \delta_{x_i}$$

Se μ è σ -finita allora $I \leq \aleph_1$, se μ è PROBABILITÀ $\sum_{i \in I} c_i = 1$

$$\mu(B) = \sum_{i \in I} c_i \delta_{x_i}(B) = \sum_{i: x_i \in B} c_i$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d\mu(x) = \sum_{i \in I} \varphi(x_i) c_i$$

ESEMPIO: BERNULLI $Be(p)$ $\mu = p\delta_1 + (1-p)\delta_0$ $p \in [0, 1]$

$E = \mathbb{R}$ **BINOMIALE** $B(n, p)$ $\mu = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k$ $n \in \mathbb{N}$

(GEOMETRICA, POISSON)

(2) **MISURE ASSOLUTAMENTE CONTINUE**: $\exists f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$ misurabile tale che

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = f \quad \text{con } \lambda = \text{misura di Lebesgue su } \mathbb{R}^d$$

se μ è probabilità allora $\int f d\lambda = \int f(x) dx = 1$.

$$\mu(B) = \int_B f d\lambda = \int_B f(x) dx$$

$$\int \varphi d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \varphi(x) dx$$

ESEMPIO: UNIFORMI, EXP e GAMMA, NORMALI

PROP: Sia $X: \Omega \rightarrow (E, \mathcal{E})$ funzione. $\sigma(X) = \{X \in B\} : B \in \mathcal{E}\}$ è una σ -algebra su Ω , è la più piccola che rende X misurabile, cioè $X: (\Omega, \sigma(X)) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ è mis.

Sia $g: (E, \mathcal{E}) \rightarrow (F, \mathcal{F})$ misurabile $\Rightarrow g(X): (\Omega, \sigma(X)) \rightarrow (F, \mathcal{F})$ misurabile.

$g(X)$ è $\sigma(X)$ -misurabile allora

$$\sigma(g(X)) \subseteq \sigma(X)$$

dimi: Sia $A \in \sigma(g(x))$ allora A si può scrivere come

$$A = \{g(x) \in C\} \quad \text{con } C \in \mathcal{A}$$

Ma allora: $A = \{x \in \underbrace{g^{-1}(C)}_{=B \in \mathcal{E}}\} = \{x \in B\}$ con $B \in \mathcal{E}$

$$\Rightarrow A \in \mathcal{O}(X)$$

Questo ci dice che qualsiasi cosa possiamo esprimere "in funzione" di $g(x)$ possiamo scriverlo in funzione di x .
 Il viceversa in generale non vale dato che g può non essere iniettiva.

Sia $X: (\mathcal{Q}, \mathcal{A}, \mathcal{P}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ v.a. sia $g: (E, \mathcal{E}) \rightarrow (F, \mathcal{F})$ misurabile allora $g(X)$ è $\sigma(X)$ -misurabile

LEMMA: Sia $Y: (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}$ una v.c. $\sigma(X)$ -misurabile
Allora $\exists g: (\mathbb{E}, \mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile t.c. $Y = g(X)$.

Ovvero nel caso λ abbia valori reali vale il viceversa di quello che dicevamo prima.

dim: Sia p prima γ semplice ovvero $\exists A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$
 $\exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ t.c.

$$Y = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{A_i}$$

Possiamo inoltre chiedere (si può sempre fare) che $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $C_i \neq C_j$ se $i \neq j$ e che $\bigcup_{i=1}^n A_i = \mathcal{R}$

Abbiamo che $Y^{-1}(\{c_i\}) = A_i \in \sigma(X)$ per hp

$$\Rightarrow \exists B_i \in \mathcal{E} \text{ s.t. } A_i = \{x \in B_i\}$$

Sia $g: (E, \mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{R}$ definita così:

$$g(x) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{B_i}(x)$$

Affermo che $Y = g(X)$.

$$Y = \sum_{i=1}^n c_i 1_{A_i}$$

Seja $w \in A_j \Rightarrow X(w) \in B_j$

Voglio dire che $X(w) \notin B_i \quad \forall i \neq j$.

Se $x(0) \in B_i \Rightarrow w \in A_i$ ma questo è impossibile perché A_i sono disgiunti.

$$g(X(\omega)) = \sum_{i=1}^n c_i 1_{B_i}(X(\omega)) = c_J$$

ok visto che ω è generico.

$$Y(\omega) = C_5$$

Ora vogliamo passare al limite per dimostrare per l'esperienza.

Sia Y v.c. ≥ 0 allora $\exists \{Y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ v.c. semplici della forma imposta sopra tali che:

$$Y_k \uparrow Y$$

$$\text{cioè } \forall \omega \in \Omega \quad Y_k(\omega) \leq Y_{k+1}(\omega) \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ e } \lim_{k \rightarrow \infty} Y_k(\omega) = Y(\omega)$$

Abbiamo mostrato che $\forall k \in \mathbb{N} \exists g_k: (E, \mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile tale che: $Y_k = g_k(X)$

Ora dobbiamo mostrare che le g_k hanno limite (nei punti misurabili)

$$\text{Sia } g(x) = \limsup_{k \rightarrow \infty} g_k(x) \quad \forall x \in E$$

$$\forall \omega \in \Omega, \quad g_{k+1}(X(\omega)) \geq g_k(X(\omega)) \Rightarrow \text{succ. crescente} \Rightarrow \text{ammette limite}$$

$$\Rightarrow g(X(\omega)) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(X(\omega)) \quad (\text{è limite vero dato che } \nearrow \text{ })$$

$$\Rightarrow g(X(\omega)) = Y(\omega) \quad \text{perché } Y_k(\omega) \rightarrow Y(\omega) \text{ per succ. cresc.}$$

$$\text{Se } Y \text{ è generica allora } Y = Y^+ - Y^- \Rightarrow \exists g^+ \text{ e } g^- \text{ t.c.}$$

$$Y^\pm = g^\pm(X)$$

$$\text{Allora segue che } Y = g(X) \text{ dove } g = g^+ - g^-$$

2. SPERANZA CONDIZIONATA

def: $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sp. prob. Sia $B \in \mathcal{A}, \mathbb{P}(B) > 0$ allora $\forall A \in \mathcal{A}$ si definisce

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

OSS: $A \mapsto \mathbb{P}(A|B)$ è una probabilità su (Ω, \mathcal{A})

Quindi $\forall X: (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ v.c. misurabile ≥ 0 è ben definito

$$\text{def} \quad \mathbb{E}(X|B) := \int_{\Omega} X d\mathbb{P}(\cdot|B) = \frac{\mathbb{E}(X 1_B)}{\mathbb{P}(B)}$$

(1) Si verifica subito che è vera per le indicatorici, poi per le semplici, e poi passando al limite...

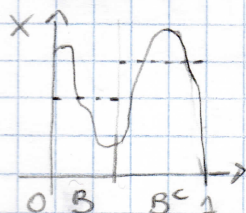
$\mathbb{E}(X|B)$ è il valore atteso di X sapendo che B si è verificato.

def Sia $\mathcal{G} := \sigma(\{B\}) = \{\emptyset, B, B^c, \Omega\}$. Definiamo $\forall X$ v.c. ≥ 0 la nuova variabile aleatoria Y

$$Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|B) 1_B + \mathbb{E}(X|B^c) 1_{B^c}$$

Quindi abbiamo $X: (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}$ e $Y: (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}$

ESEMPIO: $\Omega = [0, 1], \mathcal{A} = \mathcal{B}([0, 1]), \mathbb{P} = \lambda = \text{leb}$



OSS: (1) $Y = E(X|G)$ è una v.a. G -misurabile

dim: 1_B è G -misurabile e 1_{B^c} è G -misurabile
(evidente perché B e $B^c \in G$)

$\Rightarrow \alpha 1_B + \beta 1_{B^c}$ è G -misurabile $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Possiamo prendere $\alpha = E(X|B)$, $\beta = E(X|B^c)$ etc

(2) Y è la "migliore approssimazione" di X con v.a. G -misurabili

↓
si intende che $\forall A \in G \quad \int_A X dP = \int_A Y dP$
(potremmo scegliere un' appross. diversa, e' arbitraria)

ESERCIZIO: Sia $G = \sigma(\{B_i\}_{i \in I})$ dove $I \subseteq \mathbb{N}$ (finito o numerabile)
e $\{B_i\}_{i \in I}$ è una partizione di Ω (ie. $\forall i \neq j \quad B_i \cap B_j = \emptyset, \cup_{i \in I} B_i = \Omega$)
e $P(B_i) > 0 \quad \forall i$

$\Rightarrow G = \{A = \cup_{i \in J} B_i : J \subseteq I\}$

Sia $X: (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow \mathbb{R}$ v.a. ≥ 0 . Definiamo $Y = E(X|G) = \sum_{i \in I} c_i 1_{B_i}$
dove $c_i = E(X|B_i)$.

Mostrare che Y è G -misurabile e mostrare che $\forall A \in G$

$$\int_A X dP = \int_A Y dP$$

TEO: Sia (Ω, \mathcal{A}, P) uno sp. di prob. e sia $G \subseteq \mathcal{A}$ σ -algebra.

$\forall X: (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow \mathbb{R}$ v.a. ≥ 0 (nsp. L^1) allora $\exists Y$

$Y: (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow \mathbb{R}$ v.a. t.c.

(1) $Y \geq 0$ (nsp. $Y \in L^1$).

(2) Y è G -misurabile

(3) $\forall A \in G \quad E(X 1_A) = E(Y 1_A)$ (ie. $\int_A X dP = \int_A Y dP$)

Se Y' è un'altra v.a. che soddisfa (1), (2), (3) allora $Y = Y'$ q.c.

def: Y si dice (versione bella) **SPERANZA CONDIZIONALE** di X
dato G e si scrive $Y = E(X|G)$ q.c.

LEMMA: Siano Y, Y' v.a. ≥ 0 (oppure in L^1) definite su (Ω, \mathcal{A}, P) .

Sia $G \subseteq \mathcal{A}$ σ -algebra. Supponiamo che Y, Y' siano G -misurabili e t.c.

$$\int_B Y dP \stackrel{(*)}{\geq} \int_B Y' dP \quad \forall B \in G$$

Allora $Y \geq Y'$ q.c. (ossia $Y(\omega) \geq Y'(\omega)$ q.c.)

dim: Sia $F_{a,b} = \{Y \leq a < b \leq Y'\}$ $a, b \in \mathbb{R}$

$$\{Y < Y'\} = \bigcup_{\substack{a, b \in \mathbb{Q} \\ a < b}} F_{a,b}$$

$$\Rightarrow P(\{Y < Y'\}) \leq \sum_{\substack{a, b \in \mathbb{Q} \\ a < b}} P(F_{a,b})$$

Basta mostrare che $P(F_{a,b}) = 0 \quad \forall a, b$

Per assurdo supponiamo $\exists a < b$ t.c. $P(F_{a,b}) > 0$

$F_{a,b} \in G$ infatti $F_{a,b} = \{Y \leq a\} \cap \{Y' \geq b\} \Rightarrow \in G$

dato che $\uparrow P(F_{a,b}) > 0$

$\uparrow G$ è dato che Y, Y' sono G -mis

$$\int_{F_{a,b}} Y dP \leq a \cdot P(F_{a,b}) < b \cdot P(F_{a,b}) \leq \int_{F_{a,b}} Y' dP \quad \text{ASSURDO}$$

Il lemma ci garantisce che se f e Y del teorema allora deve essere unica.

Ricordiamoci che $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = \{X(\Omega; \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R} \text{ v.a. t.c. } \|X\|_p = E(|X|^p)^{1/p} \text{ c.a. } (p \geq 1)\}$

$\|\cdot\|_p$ è seminorma $\|X\|_p \geq 0$; $\| \lambda X \|_p = |\lambda| \|X\|_p \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$; $\|X+Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p$
 $\hookrightarrow \|X\|_p = 0 \nRightarrow X=0$

Gli L^p sono completi ovvero: $\forall \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di Cauchy in L^p

$\exists X \in L^p$ t.c. $\|X - X_n\|_p \rightarrow 0$

Osserviamo che \checkmark consideriamo le classi di equivalenza X non è unico perché se lo cambia su un insieme di misura nulla non cambia l'integrale.

A noi interessa il caso $p=2$.

Se $X, Y \in L^2$ definiamo: $\langle X, Y \rangle = E(XY)$

(prodotto scalare che induce la stessa norma di prima)

Sia $H = \tilde{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ spazio di Hilbert (di classi di equivalenza)

Sia $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ σ -algebra. Sia $K = \tilde{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ sp di Hilbert (sempre di classi di equivalenza).

$K \subseteq H$, K è sottospazio vettoriale chiuso. (dato che K è di Hilbert quindi è completo, e gli sp. metrici completi sono chiusi)

PROP: $\forall X \in H \quad \exists Y \in K$ **PROIEZIONE ORTOGONALE** di X su K ovvero

$X - Y \perp K$ (ovvero $\forall Z \in K \quad \langle X - Y, Z \rangle = 0$)
 (ovvero $\forall Z \in K \quad \langle X, Z \rangle = \langle Y, Z \rangle$)

dim: Sia ora $\tilde{X} \in H = \tilde{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ allora $\exists \tilde{Y} \in K = \tilde{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ t.c.

(TEO)

$$\langle \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle = \langle \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle \quad \forall \tilde{Z} \in K$$

Sia ora $X \in \tilde{X}$ (una funzione nella classe di equivalenza)
 $Y \in \tilde{Y}, Z \in \tilde{Z}$

$$\Rightarrow \langle X, Z \rangle = \langle Y, Z \rangle \Leftrightarrow E(XZ) = E(YZ) \quad (*) \quad \forall Z \in K$$

Quindi $\forall X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \quad \exists Y \mathcal{G}$ -MIS e in L^2 t.c. (*)

$\forall B \in \mathcal{G}, Z = 1_B$ è \mathcal{G} -MIS in $L^2 \Rightarrow Z \in K$, quindi

$$E(X 1_B) = E(Y 1_B)$$

Quindi abbiamo mostrato il teo nel caso $X \in L^2$, bisogna mostrarlo per $X \geq 0$ o $X \in L^1$ (...)

PROP: (MONOTONIA) Siano X_1, X_2 v.a. ≥ 0 (o in L^1). Siano $Y_1 = E(X_1 | \mathcal{G})$

$Y_2 = E(X_2 | \mathcal{G})$. Se $X_1 \geq X_2$ q.c. $\Rightarrow Y_1 \geq Y_2$ q.c.

Se $X_1 \geq 0$ q.c. $\Rightarrow Y_1 \geq 0$ q.c.

dim: Y_1 e Y_2 sono \mathcal{G} -misurabili. Per il lemma basta mostrare che:

$$E(Y_1 1_B) \geq E(Y_2 1_B) \quad \forall B \in \mathcal{G}$$

$$\text{Ma } E(Y_1 1_B) = E(X_1 1_B) \geq E(X_2 1_B) = E(Y_2 1_B)$$

per definizione monotonia dell'integrale

dim: ESISTENZA sp. COND.

(TEO) Sia X v.c. ≥ 0 . $\forall n \in \mathbb{N}$ sia $X_n = X \wedge n = \min(X, n)$
 $|X_n| \leq n$ e quindi è limitata $\Rightarrow X_n \in L^2$
(dato che $E(X_n^2) \leq n^2 < \infty$)

Per quanto mostrato prima $\exists Y_n$ v.c. \mathcal{G} -mis, in L^2
tale che

$$E(Y_n 1_B) = E(X_n 1_B) \quad \forall B \in \mathcal{G}$$

Dobbiamo dimostrare che $\forall n$ $Y_n \geq 0$ q.c.
(per passare al limite)

dato che $X_n \geq 0$ q.c.

$$E(Y_n 1_B) = E(X_n 1_B) \geq 0 = E(0 1_B) \quad \forall B \in \mathcal{G}$$

Quindi per le lemma $Y_n \geq 0$ q.c.

$$\Rightarrow Y_n = E(X_n | \mathcal{G}) \quad (\text{soddisfa la definizione})$$

Per costruzione $X_n \leq X_{n+1}$

\Rightarrow Per la proposizione allora $Y_n \leq Y_{n+1}$ q.c.
(quindi le Y_n formano una succ. crescente)

Riassumendo: se pongo $Y = \limsup_n Y_n$ allora si ha che

(*) $Y_n \uparrow Y$ q.c. (e inoltre $Y_n \geq 0$)
(ovvero $\limsup = \lim$ q.c.)

(1) $Y \geq 0$ q.c. dato che $Y_n \uparrow Y$ e $Y_n \geq 0$ q.c.

(2) Y è \mathcal{G} -misurabile (perché \limsup di funzioni \mathcal{G} -misurabili è \mathcal{G} -misurabile)

(3) $\forall B \in \mathcal{G}$

$$E(Y 1_B) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(Y_n 1_B) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n 1_B) = E(X 1_B)$$

\downarrow convergenza monotona \downarrow perché $Y_n = E(X_n | \mathcal{G})$ \downarrow dato che $X_n \uparrow X$ $\forall \omega \in \Omega$ e converg. monotona

Quindi abbiamo mostrato l'esistenza se $X \geq 0$.

Vediamo ora il caso $X \in L^1$.

$$X = X^+ - X^- \Rightarrow X^+ \geq 0 \text{ e } X^- \geq 0 \quad \text{e} \quad E(X^+) < +\infty \quad E(X^-) < +\infty$$

Di conseguenza $\exists Y^+ = E(X^+ | \mathcal{G})$ e $Y^- = E(X^- | \mathcal{G})$
con $Y^+ \geq 0, Y^- \geq 0$ q.c.

$$\text{Sia } Y = Y^+ - Y^-.$$

(1) $E(|Y|) \leq E(Y^+) + E(Y^-) = E(Y^+) + E(Y^-) = E(X^+) + E(X^-) < +\infty$
 $\Rightarrow Y \in L^1$

(2) Y è \mathcal{G} -misurabile che è differenza di funz. \mathcal{G} -mis

(3) $E(Y 1_B) = E(Y^+ 1_B) - E(Y^- 1_B) = E(X^+ 1_B) - E(X^- 1_B) = E(X 1_B)$
 $\forall B \in \mathcal{G}$

DETAGLIO IMPORTANTE che ha TACUTO:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}, Y_n \leq Y_{n+1}$ q.c. ma lui ha usato Y che

(2) q.c. $Y_n \leq Y_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (che in teoria potrebbe essere diverso)

$$(1) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists A_n \in \mathcal{A} : P(A_n) = 0 \quad \forall \omega \notin A_n : Y_n(\omega) \leq Y_{n+1}(\omega)$$

$$(2) \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{A}, P(A) = 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall \omega \notin A, Y_n(\omega) \leq Y_{n+1}(\omega) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Chiaramente $(2) \Rightarrow (1)$, ma vogliamo mostrare che $(1) \Rightarrow (2)$

Se pongo $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ allora per subadditività $P(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n) = 0$
(dato che $n \in \mathbb{N}$)

Allora abbiamo che $(1) \Rightarrow (2)$ dato che se $\omega \notin A$
 $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad \omega \notin A_n \Rightarrow Y_n(\omega) \leq Y_{n+1}(\omega)$

Questo cosa ea usera' spessissimo, quindi sposterai i q.c. come vuole usando il fatto che le unioni sono numerabili e quindi posso usare σ -additività dell'integrale.

PROPRIETÀ' della SPERANZA CONDIZIONALE

$(\mathcal{Q}, \mathcal{A}, P)$ sp. di probabilità, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ σ -algebra, X, Y, X_n v.a. ≥ 0 (o in L^1)

$$(1) \text{ Se } \mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\} \Rightarrow E(X|\mathcal{G}) = E(X) = \text{cost} \quad \text{q.c.}$$

$$(2) \text{ Se } X \text{ è } \mathcal{G}\text{-misurabile} \Rightarrow E(X|\mathcal{G}) = X \quad \text{q.c.}$$

In particolare se $X = \text{cost}$ q.c. allora $E(X|\mathcal{G}) = X = \text{cost}$ q.c.

$$(3) E(E(X|\mathcal{G})) = E(X) \quad \text{segue dalla (3) della def con } A = \Omega$$

LINEARITÀ:

$$(4) E(\alpha X + \beta Y | \mathcal{G}) = \alpha E(X|\mathcal{G}) + \beta E(Y|\mathcal{G}) \quad \text{q.c.}$$

$$(5) \text{ MONOTONIA / POSITIVITÀ: } X \geq Y \Rightarrow E(X|\mathcal{G}) \geq E(Y|\mathcal{G}) \quad \text{q.c.}$$

$$(6) \text{ C-JENSEN: se } \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ convessa } \Rightarrow E(\varphi(X)|\mathcal{G}) \geq \varphi(E(X|\mathcal{G})) \quad \text{q.c.}$$

$\varphi \in L^1$ o $\varphi \geq 0 \quad \xrightarrow{\text{condizionale}} \text{continua}$

dim. φ è convessa se $\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall a \in [0, 1]$

$$\varphi(ax + (1-a)y) \leq a\varphi(x) + (1-a)\varphi(y)$$

equivale a dire che:

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x}$$

è crescente in ciascun argomento x, y fissando l'altro

$$\varphi \text{ convessa} \Rightarrow \forall \bar{x} \in \mathbb{R} \quad \exists a_{\bar{x}}, b_{\bar{x}} \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \varphi(x) \geq a_{\bar{x}}x + b_{\bar{x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\varphi(x) = a_{\bar{x}}\bar{x} + b_{\bar{x}}$$

(ovvero che "tange" e sta sotto + o -)

Sia $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \mathbb{Q}$ (ovvero numeriamo i razionali)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi(x) \geq a_{q_n}x + b_{q_n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Sia } g(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \{a_{q_n}x + b_{q_n}\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi(x) \geq a_{q_n}x + b_{q_n} \\ \text{Sia } g(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \{a_{q_n}x + b_{q_n}\} \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi(x) \geq g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Inoltre abbiamo $\varphi(q) = g(q) \quad \forall q \in \mathbb{Q}$

g è convessa (perché sup di f.c. convessa) \Rightarrow è continua

$\Rightarrow g = \varphi$ dato che sono continue e coincidono sui razionali
su tutto \mathbb{R}

$$\Rightarrow \varphi(x) = \sup_n (A_n x + B_n) \quad \text{con } A_n = a_{q_n} \quad B_n = b_{q_n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) \geq A_n x + B_n$$

$$\Rightarrow \varphi(X) \geq A_n X + B_n \quad X \text{ v.c.}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\varphi(X) | \mathcal{G}) \geq A_n \mathbb{E}(X | \mathcal{G}) + B_n \quad \text{q.c.}$$

(Ora dato che siamo ai numerabili scambiamo i q.c. col $\forall n$)

$$\mathbb{E}(\varphi(X) | \mathcal{G}) \geq \sup_n (A_n \mathbb{E}(X | \mathcal{G}) + B_n) \quad (\text{fissato } \omega)$$

$$\Rightarrow \exists A \in \mathcal{A} : |A| = 0 \text{ o c. } \forall \omega \notin A \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\mathbb{E}(\varphi(X) | \mathcal{G}) \geq A_n \mathbb{E}(X | \mathcal{G}) + B_n$$

$$z \geq A_n y + B_n$$

$$\Rightarrow z \geq \sup (A_n y + B_n) = \varphi(y)$$

$$\text{q.c. } \mathbb{E}(\varphi(X) | \mathcal{G}) \geq \varphi(\mathbb{E}(X | \mathcal{G}))$$

(7) **C-MONOTONA**: se $0 \leq X_n \uparrow X$ q.c.

$$\Rightarrow \text{q.c. } 0 \leq \mathbb{E}(X_n | \mathcal{G}) \uparrow \mathbb{E}(X | \mathcal{G})$$

dim.: Poniamo $Y_n = \mathbb{E}(X_n | \mathcal{G})$

Per hp abbiamo $0 \leq X_n \leq X_{n+1}$ q.c.

$$\Rightarrow 0 \leq Y_n \leq Y_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{q.c.}$$

monotonia
della s.p.d.

Definiamo $Y := \limsup_n Y_n$

Y è \mathcal{G} -misurabile e $Y \geq 0$ q.c.

Per costruzione $Y_n \uparrow Y$ q.c.

Basta mostrare che $Y = \mathbb{E}(X | \mathcal{G})$ q.c.

rimane da mostrare che $\mathbb{E}(Y 1_B) = \mathbb{E}(X 1_B) \quad \forall B \in \mathcal{G}$

$$\mathbb{E}(X 1_B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n 1_B) = \mathbb{E}(Y 1_B)$$

con monotonia ordinaria
con monotonia ordinaria

(8) **C-FATOU**

(9) **C-DOMINATA**

} non è enunciata una funzione come sopra

(10) **RAFFINAMENTO**: se $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ σ -algebra

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) | \mathcal{H}) = \mathbb{E}(X | \mathcal{H}) \quad \forall X \geq 0 \text{ o in } L^1$$

$$\text{dim.: } Z = \mathbb{E}(X | \mathcal{H}), \quad Y = \mathbb{E}(X | \mathcal{G}), \quad W = \mathbb{E}(Y | \mathcal{H}) \quad (\dots)$$

OSS: Abbiamo visto che $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{G})) = \mathbb{E}(X)$

quindi se $X \geq 0 \Rightarrow Y \geq 0$ e Y è integrabile e idem se $X \in L^1$

(...) Sia $H \in \mathcal{H} \subseteq \mathcal{G} \Rightarrow H \in \mathcal{G}$

$$\mathbb{E}(X 1_H) = \mathbb{E}(Y 1_H) = \mathbb{E}(W 1_H) \quad (*)$$

dato che
 $Y = \mathbb{E}(X | \mathcal{G})$
e $H \in \mathcal{G}$

dato che
 $W = \mathbb{E}(Y | \mathcal{H})$
e $H \in \mathcal{H}$

Per costruzione W è \mathcal{G} -misurabile e vale (8) quindi per unicità della speranza condizionale deve essere

$$W = E(X|\mathcal{G})$$

Restava solo da mostrare che $X \geq 0 \Rightarrow W \geq 0$ e $X \in L^1 \Rightarrow W \in L^1$ (avremmo dovuto farlo prima una volta)

$$X \geq 0 \Rightarrow Y = E(X|\mathcal{G}) \geq 0 \text{ q.c.} \Rightarrow W = E(Y|\mathcal{G}) \geq 0 \text{ q.c.}$$

$$X \in L^1 \Rightarrow Y = E(X|\mathcal{G}) \in L^1 \Rightarrow W = E(Y|\mathcal{G}) \in L^1$$

CORO: $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\} \Rightarrow E(E(X|\mathcal{G})) = E(X)$

dato che in generale $E(X|\mathcal{G}) = E(X)$. (= proprietà 3)

(1) MISURABILITÀ: se Z è \mathcal{G} -misurabile, $\forall X \ E(ZX|\mathcal{G}) = Z E(X|\mathcal{G})$
 perché o $X \geq 0$ e $Z \geq 0$ q.c. oppure $X \in L^1$ e $Z \in L^1$
 (ottenuti dalle due scriviamo non ha senso)

dimi: $Y := E(X|\mathcal{G})$

Sia $X \geq 0$ e $Z \geq 0$ q.c. Basta mostrare $[4] (3)$ della def.
 $\forall B \in \mathcal{G} \ E(ZX|_B) = E(ZY|_B) \quad \forall Z \quad (*)$

Sia $Z = 1_G$ con $G \in \mathcal{G}$

$$E(ZX|_B) = E(X|_{B \cap G}) = E(Y|_{B \cap G}) = E(ZY|_B)$$

quindi l'abbiamo verificato per $Z =$ indicatrice.

Sia ora Z una funzione semplice $Z = \sum_{i=1}^n c_i 1_{G_i}$ $c_i \geq 0$ $G_i \in \mathcal{G}$
 è ovvio che vale perché (*) è lineare in Z .

Sia Z qualsiasi \mathcal{G} -misurabile, $Z \geq 0$ allora $\exists \{Z_n\}$ t.c.
 $0 \leq Z_n \uparrow Z$ Z_n semplici e \mathcal{G} -misurabili

$$E(ZX|_B) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(Z_n X|_B) \stackrel{\text{conv. mon.}}{=} E(ZY|_B)$$

Se $X \in L^1$ e $XZ \in L^1$ definiamo $Y^\pm = E(X^\pm|\mathcal{G})$
 allora abbiamo che:

$$E(Z^\pm X^\pm|_B) = E(Z^\pm Y^\pm|_B) \quad \forall B \in \mathcal{G}$$

$$\text{linearità: } E(ZX|_B) = E((Z^+ X^+ - Z^+ X^- - Z^- X^+ + Z^- X^-)|_B) = \dots \stackrel{!}{=} E(ZY|_B)$$

Si scambia X^+ con Y^+

(8) G-FATOU: $X_n \geq 0$ q.c. $\forall n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow E(\liminf_n X_n|\mathcal{G}) \leq \liminf_n E(X_n|\mathcal{G})$ q.c.

dimi: $\liminf_n X_n = \uparrow \lim_{k \rightarrow \infty} Z_k$ con $Z_k = \inf_{n \geq k} X_n$

Possiamo applicare G-MONOTONA:

$$E(\liminf_n X_n|\mathcal{G}) = \uparrow \lim_{k \rightarrow \infty} E(Z_k|\mathcal{G}) \quad (*)$$

Abbiamo che $Z_k \leq X_m \quad \forall m \geq k \Rightarrow E(Z_k|\mathcal{G}) \leq E(X_m|\mathcal{G})$ q.c. $\forall m, k$

$$E(Z_k | \mathcal{G}) \leq \inf_{m \geq k} E(X_m | \mathcal{G}) \quad \text{q.c.}$$

$$(*) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{m \geq k} E(X_m | \mathcal{G}) = \liminf_n (E(X_n | \mathcal{G}))$$

↳ In realtà sono fuori automaticamente

(9) **C-DOMINATA**: $X_n, X \in L^1$, $X_n \rightarrow X$ q.c. $\exists Y$ v.c. in L^1 t.c. $|X_n| \leq Y$ q.c. $\forall n \in \mathbb{N}$

$$E(X | \mathcal{G}) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n | \mathcal{G})$$

dim: (a tratti)

$$X_n + Y \geq 0 \quad \text{q.c. } \forall n$$

Applichiamo C-FATOU a $X_n + Y$ con $\liminf = \lim$ (dato che convergono) ↳ solo nelle X_n

$$Y - X_n \geq 0 \quad \text{q.c. } \forall n$$

Applichiamo ancora C-FATOU a $Y - X_n$ con $\liminf \rightarrow \lim$ (→) x esercizio

def: (Ω, \mathcal{A}, P) sp di probabilità, A, B eventi ($\in \mathcal{A}$) sono **INDIPENDENTI** se

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Se $P(A) > 0$ allora otteniamo $P(B|A) = P(B)$

$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ sono **INDIPENDENTI** se $\forall J \subseteq \{1, \dots, n\}$, $J = \{j_1, \dots, j_m\}$

$$P(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_m}) = P(A_{j_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{j_m}) \quad (*)$$

Siano ora $G_1, \dots, G_n \subseteq \mathcal{A}$ famiglie di eventi si dicono

INDIPENDENTI se $(*)$ vale $\forall A_{j_1} \in G_{j_1}, \dots, A_{j_m} \in G_{j_m}$

(notiamo che non chiediamo che all'interno dei G_i gli eventi siano indipendenti)

def: Date $\{G_i\}_{i \in I}$, I arbitrario (anche ∞), $G_i \subseteq \mathcal{A} \quad \forall i \in I$ sono famiglie di eventi, esse si dicono **INDIPENDENTI** se $\forall I' \subset I$ con $|I'| < +\infty$, $\{G_i\}_{i \in I'}$ sono indipendenti

OSS: Se $G_1, \dots, G_n \subseteq \mathcal{A}$ t.c. $\Omega \in G_i \quad \forall i = 1, \dots, n$ (in particolare se le G_i sono σ -algebre) allora esse sono indipendenti se $\forall A_1 \in G_1, \dots, A_n \in G_n$

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n)$$

Viene fuori perché possiamo prendere $A_i = \Omega \quad \forall i$ e quindi in realtà chiedere questa condizione equivale a chiedere la $(*)$

PROP: $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{A}$ sono indipendenti \Leftrightarrow lo sono $\sigma(B_1), \dots, \sigma(B_n)$

Non lo dimostra perché è noioso, anzi deriva dal fatto che C, D indipendenti $\Rightarrow C^c, D$ indep.

$$P(C^c \cap D) = P((\Omega \setminus C) \cap D) = P((\Omega \cap D) \setminus (C \cap D)) = P(D) - P(C \cap D) = P(D) - P(C)P(D) \\ \stackrel{!}{=} P(D) \cdot P(C^c)$$

e che vale per famiglie generali di n eventi

def: Date X_1, \dots, X_n v.a. def su (Ω, \mathcal{A}, P) a valori in $(E_1, \mathcal{E}_1), \dots, (E_n, \mathcal{E}_n)$ esse si dicono **INDIPENDENTI** se lo sono $\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_n)$.
Cioè se $\forall A_1 \in \sigma(X_1), \dots, A_n \in \sigma(X_n)$

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n)$$

Cioè se $\forall B_1 \in \mathcal{E}_1, \dots, \forall B_n \in \mathcal{E}_n$ ($A_i = \{X_i \in B_i\}$)

$$P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in B_i)$$

FATTI:

- $\{\mathcal{G}_i\}_{i \in I}$ σ -algebre indipendenti $\left\{ \begin{array}{l} \text{se } G_i \in \mathcal{G}_i \forall i \Rightarrow \{G_i\}_{i \in I} \text{ indipendenti} \\ \text{se } X_i \text{ è v.a. } \mathcal{G}_i\text{-mis } \forall i \Rightarrow \{X_i\}_{i \in I} \text{ indep.} \\ \hookrightarrow \sigma(X_i) \subseteq \mathcal{G}_i \end{array} \right.$
- $\{X_i\}_{i \in I}$ v.a. indipendenti $\Rightarrow \{P_i(X_i)\}_{i \in I}$ v.a. indipendenti $\forall \varphi_i: (E_i, \mathcal{E}_i) \rightarrow (B_i, \mathcal{B}_i)$ ms (segue dal fatto che $\sigma(\varphi_i(X_i)) \subseteq \sigma(X_i)$)
- se $\{\mathcal{G}_i\}_{i \in I}$ sono σ -algebre indipendenti \Rightarrow
 - se $J \subseteq I$ $\{\mathcal{G}_j\}_{j \in J}$ sono indipendenti
 - $I = \bigcup_{j \in J} I_j$ dove $I_j \cap I_m = \emptyset \forall j \neq m$ (ovvero partizioniamo l'insieme degli indici)

Allora $\{G_j\}_{j \in J}$ sono indipendenti dove $G_j = \sigma(\bigcup_{i \in I_j} \mathcal{G}_i)$

CASO PARTICOLARE di (11):

$X \equiv 1 \Rightarrow E(Z|G) = Z$ q.c. se Z è G -misurabile

(12) **INDIPENDENZA**: se \mathcal{G}, G sono σ -ALGEBRE $\subseteq \mathcal{A}$, X v.a. ≥ 0 ($0 \leq X \leq 1$)
t.c. $\sigma(G, X)$ indipendente da \mathcal{G} . ($\sigma(G, X) = \sigma(G \cup \sigma(X))$)
Allora:

$$E(X | \sigma(G, \mathcal{A})) = E(X | G)$$

ESEMPIO: Non basta chiedere indipendenza da G e X .

Tizio, Caio, Sempronio lanciano un dado regolare a 6 facce

$A = \{\text{Tizio e Caio ottengono lo stesso risultato}\}$

$B = \{\text{Tizio e Semp " " " "}\}$

$C = \{\text{Caio e Semp " " " "}\}$

Verificare che A e B sono indep, B e C sono indep, A e C sono indep
Ma $\{A, B, C\}$ non sono indipendenti.

$\{A, B, C\}$ non sono indep, dato che $P(C | A \cap B) = 1$ mentre $P(C) = 1/6$
(ovvero $\sigma(C)$ indep da $\sigma(A)$, $\sigma(C)$ indep da $\sigma(B)$ ma $\sigma(C)$ non indep da $\sigma(\{A, B\})$)

dim: Sia $H \subseteq \mathcal{G}$ e $G \subseteq \mathcal{G} \Rightarrow H \cap G \in \sigma(G, \mathcal{A})$

$$E(X 1_{G \cap H}) = E((X 1_G) 1_H)$$

cosa che si era dovuto dire $\left[\begin{array}{l} \text{Ricordiamo che se } Y, Z \text{ v.a. reali indep. in } L^1 \Rightarrow YZ \in L^1 \text{ e } E(YZ) = E(Y)E(Z) \\ \Rightarrow \text{cov}(Y, Z) = 0 \text{ e } Y \text{ e } Z \text{ si dicono } \text{SCORRELATE} \\ \text{Inoltre } E(\varphi(X), \psi(Z)) = E(\varphi(Y))E(\psi(Z)) \quad \forall \varphi, \psi \text{ misurabili e limitate} \end{array} \right.$

Abbiamo che $X1_G$ è $\sigma(G, X)$ -misurabile infatti 1_G è \mathcal{G} -mis
 $\Rightarrow 1_G$ è $\sigma(G, X)$ -mis ; X è $\sigma(X)$ -mis \Rightarrow è $\sigma(G, X)$ -mis

Inoltre 1_H è \mathcal{H} -mis.

$$\mathbb{E}(X1_G | \mathcal{H}) = \mathbb{E}(X1_G) \mathbb{E}(1_H) = \mathbb{E}(Y1_G) \mathbb{E}(1_H) \quad (*)$$

indip

con $Y = \mathbb{E}(X | \mathcal{G})$. Y è \mathcal{G} -mis, G è \mathcal{G} -mis $\Rightarrow Y1_G$ è \mathcal{G} -mis

$\Rightarrow Y1_G$ e 1_H sono indipendenti

$$\Rightarrow (*) = \mathbb{E}(Y1_{G \cap H})$$

$$\mathbb{E}(X1_{G \cap H}) = \mathbb{E}(Y1_{G \cap H}) \quad \forall G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H}$$

Dobbiamo passare da $G \cap H$ a $A \in \sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})$

Supponiamo $X \geq 0$, X limitata ($X \leq k$, $k \in (0, \infty)$)

(Sia $\mu(A) = \mathbb{E}(X1_A)$ e $\nu(A) = \mathbb{E}(Y1_A)$. $\forall A \in \mathcal{A}$)

\Rightarrow vale lo stesso vale per Y per monotonia...

Abbiamo mostrato che

$$\mu(G \cap H) = \nu(G \cap H) \quad \forall G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H}$$

Sia $\mathcal{B} = \{G \cap H : G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H}\}$

$\Rightarrow \mathcal{B}$ è una base di $\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})$, infatti:

CHIUSO PER \cap FINITE:

$$\underbrace{(G_1 \cap H_1)}_{\in \mathcal{B}} \cap \underbrace{(G_2 \cap H_2)}_{\in \mathcal{B}} = \underbrace{(G_1 \cap G_2)}_{\in \mathcal{G}} \cap \underbrace{(H_1 \cap H_2)}_{\in \mathcal{H}} \in \mathcal{B}$$

\mathcal{B} GENERA, cioè $\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H}) = \sigma(\mathcal{B})$

$$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{G} \cup \mathcal{H} \subseteq \mathcal{B} \Rightarrow \sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \subseteq \sigma(\mathcal{B})$$

è evidente che $\mathcal{B} \subseteq \sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ per costruzione

Quindi $\mu(A) = \nu(A) \quad \forall A \in \mathcal{B}$ base di $\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})$.

Ma μ e ν sono misure finite tali che

$$\mu(A) = \int_A X dP$$

è una misura
(sempre) $\forall X \geq 0$ v.a.

σ -ADDITIVA
repe. da conv.
monotona

$$\mu(\Omega) = \mathbb{E}(X) < +\infty$$

$$\nu(\Omega) = \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X) < +\infty$$

Se due misure \equiv su una base coincidono su tutta la

σ -ALGEBRA $\Rightarrow \mu(A) = \nu(A) \quad \forall A \in \sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})$

$$\mathbb{E}(X1_A) = \mathbb{E}(Y1_A) \quad \forall A \in \sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})$$

⑤

21/03/2012

OSS: (Ω, \mathcal{F}, P) sp. prob. X v.a. in L^1 ($0 \leq X$) $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$

$\mathbb{E}(X | \mathcal{G})$ è una v.a. \mathcal{G} -misurabile in L^1 t.c.

$$(1) \quad \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) 1_A) = \mathbb{E}(X 1_A) \quad \forall A \in \mathcal{G}$$

Questo è equivalente a chiedere che

$$(2) \quad \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) Z) = \mathbb{E}(X Z) \quad \begin{matrix} \text{v.a.} \\ \forall Z \text{ limitata e } \mathcal{G}\text{-misurabile} \\ (\text{ie } Z: (\Omega, \mathcal{G}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))) \end{matrix}$$

Se $X \geq 0$ posso chiedere $\forall Z \geq 0$ e \mathcal{G} -mis.

dim: E' evidente che se e' vero quello con z e' vero l'altro dato che I_A e' una v.c. limitata e G -misurabile

Viceversa se vale quello con le indicatorici allora (2) e' vera per le indicatorici \Rightarrow e' vera per z semplice per linearita'

Allora posso scrivere $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ con z_n semplice e $|z_n| \leq \cos t$ e uso lebesgue:

$$\begin{array}{ccc} E(z_n, E(X|G)) & = & E(z_n X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E(z E(X|G)) & & E(z X) \end{array} \quad \leftarrow \text{lebesgue} \quad \Rightarrow E(z X) = E(z E(X|G))$$

Nel caso in cui $X \geq 0$ e $z \geq 0$ uso la convergenza monotona al posto di lebesgue.

(Ω, \mathcal{F}, P) sp. di prob, $X: (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $Y: (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (E, \mathcal{E})$

$$E(X|Y) = E(X|\sigma(Y))$$

so che $E(X|Y) = h(Y)$ P -q.c. dove $h: (E, \mathcal{E}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ misurabile

def: Definiamo $E(X|Y=y) := h(y)$

questo a priori non e' definita ~~da~~
perche' potrebbe essere $P(Y=y)=0$
Quindi per ora e' proprio solo una def
anche se si intuisce piu' meno cosa sia

So che $E(X|Y) = h(Y)$ e' ben definita P -q.c.

$\Rightarrow h$ e' definita a meno di un insieme B t.c. $P(Y \in B) = 0$
ovvero B t.c. $d_Y = 0$ (ovvero a meno di un insieme di misura nullo rispetto alla legge di Y , piu' o meno)

Ovvero: $h \in L^1(E, \mathcal{E}, d_Y)$ ed e' definita a meno di insiemi di $d_Y = 0$

CASI in cui si PUO' FARE IL CALCOLO

(1) Ge' dato da una partizione di Ω in numerabili: $G = \sigma(B_i : i=1, \dots)$
e $B_i \cap B_j = \emptyset$ $i \neq j$ e $\bigcup B_i = \Omega$

ESEMPIO: $G = \sigma(Y)$ con Y v.c. discreta a valori $\{y_1, y_2, \dots\}$
 $\Rightarrow B_i = \{Y = y_i\}$

In questo caso abbiamo: $\text{probabilita' condizionata}$

$$E(X|G) = \sum_{i=1}^{\infty} E^{P(\cdot|B_i)}(X) I_{B_i} \quad \text{e equivalentemente:}$$

$$E(X|G) I_{B_i} = E^{P(\cdot|B_i)}(X) = \frac{1}{P(B_i)} \int_{B_i} X(\omega) I_{B_i}(\omega) P(d\omega) = \frac{1}{P(B_i)} \int_{B_i} X dP$$

Quindi:

$$E(X|G) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{P(B_i)} \int_{B_i} X dP \right) I_{B_i}$$

Se $G = \sigma(Y)$, allora

$$E(X|Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{P(Y=y_i)} \int_{\{Y=y_i\}} X dP \right) I_{\{Y=y_i\}}$$

Voglio scrivere come $h(Y) = h \cdot Y$

$$h(Y_j) = \frac{1}{P(Y=Y_j)} \int_{Y=Y_j} X dP$$

$$E(X|Y=Y_j) = \frac{1}{P(Y=Y_j)} \int_{Y=Y_j} X dP = E^{P(Y=Y_j)}(X)$$

Verifichiamo che $E(X|G) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{P(B_i)} \int_{B_i} X dP \right) I_{B_i}$

ovvero dobbiamo provare che

$$\text{dim: } E(E(X|G)I_A) = E(XI_A) \quad \forall A \in G$$

Dato che G = unione numerabile di B_i posso scegliere $A = B_j$ (e poi vale per linearità)

$$\begin{aligned} E(E(X|G)I_{B_j}) &= E\left(\left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{P(B_i)} \int_{B_i} X dP\right) I_{B_i}\right] I_{B_j}\right) \\ &\quad \downarrow \text{e' un numero} \\ &= E\left(\left(\frac{1}{P(B_j)} \int_{B_j} X dP\right) I_{B_j}\right) \\ &\quad \downarrow \\ &= \frac{P(B_j)}{P(B_j)} \int_{B_j} X dP = E(XI_{B_j}) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Quindi alla fine abbiamo due volte la formula sopra:

$$E(X|Y=Y_j) = E^{P(Y=Y_j)}(X)$$

ESERCIZIO: (Ω, \mathcal{G}, P) , $X: (\Omega, \mathcal{G}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \in L^1$

$$Y: (\Omega, \mathcal{G}, P) \rightarrow (E, \mathcal{E})$$

Supponiamo che $P(Y=e) > 0$ (ovvero ha una massa)

vogliamo calcolare $E(X|Y=e) = E(X|Y) I_{Y=e}$

$$E(X|Y) = h(Y) \text{ quindi}$$

$$E(X|Y) I_{Y=e} = \text{cost} I_{Y=e}$$

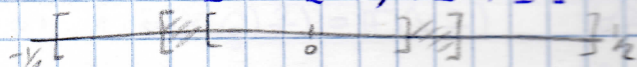
$$\begin{aligned} E(X I_{Y=e}) &= E(E(X|Y) I_{Y=e}) = E(\text{cost} \cdot I_{Y=e}) \\ &= \text{cost} \cdot P(Y=e) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{cost} = \frac{E(X I_{Y=e})}{P(Y=e)} = \frac{1}{P(Y=e)} \int_{Y=e} X dP = E^{P(Y=e)}(X)$$

$$\Rightarrow E(X|Y=e) = E^{P(Y=e)}(X) = \frac{1}{P(Y=e)} \int_{Y=e} X dP$$

ESERCIZIO: $\Omega = [-1/2, 1/2]$, $P = \text{Leb}$

$$\mathcal{G}^n \supset \mathcal{G}^{n-1} \quad \mathcal{G}^n = \sigma\left\{\left[-\frac{k}{2^n}, +\frac{k+1}{2^n}\right), \left(\frac{k}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]\right\} \quad k=0, \dots, 2^n-1$$



$$X: [-1/2, 1/2] \rightarrow \mathbb{R} \quad L^1 \text{ rispetto a Lebesgue}$$

$$E(X|\mathcal{F}_n) = ?$$

$$E(X|\mathcal{F}_n) \mathbb{I}_{\left[-\frac{k}{2^n}, -\frac{k+1}{2^n}\right] \cup \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]} = \frac{1}{P\left(\left[-\frac{k}{2^n}, -\frac{k+1}{2^n}\right] \cup \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]\right)} \int_{\left[-\frac{k}{2^n}, -\frac{k+1}{2^n}\right] \cup \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]} X dP$$

$$= \frac{2^n}{2} \left[\int_{-\frac{k}{2^n}}^{-\frac{k+1}{2^n}} X(\omega) d\omega + \int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} X(\omega) d\omega \right] \quad (*)$$

Poniamo $\mathcal{F}^s = \sigma\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n\right\} = \{A \in \mathcal{B}([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]) \text{ t.c. } -A = A\}$ sono i boreliani
simmetrici

Questa sigma algebra mi permette di distruggere tutto tranne ω da $-\omega$.

Ci chiediamo: cos'è $E(X|\mathcal{F}^s)$?

Osserviamo che (*) se X continua $\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{X(\omega) + X(-\omega)}{2}$

(questo per farci venire in mente un possibile candidato)

CONGETTURA: $E(X|\mathcal{F}^s) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(X|\mathcal{F}_n) = \frac{X(\omega) + X(-\omega)}{2}$ ci piace visto che

Osserviamo che $\frac{X(\omega) + X(-\omega)}{2}$ è funzione di $|\omega|$ chiamandolo $h(|\omega|)$

Quindi dobbiamo mostrare che $\omega \rightarrow |\omega|$ è misurabile da $\mathcal{F}^s \rightarrow \mathcal{B}([0, \frac{1}{2}])$

Ma $\{|\omega| \in A\} = A \cup (-A) \in \mathcal{F}^s$ infatti

E h è misurabile perché f di variabili aleatorie

Mi resta da vedere che $\frac{X(\omega) + X(-\omega)}{2}$ è la speranza

condizionale rispetto a \mathcal{F}^s

$$A \in \mathcal{F}^s \quad E(X \mathbb{I}_A) = E\left(\frac{X \cdot \mathbb{I}_A + X \cdot \mathbb{I}_{-A}}{2}\right) = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathbb{I}_A(\omega) X(\omega) d\omega + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathbb{I}_{-A}(\omega) X(\omega) d\omega$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathbb{I}_A(\omega) X(\omega) d\omega + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathbb{I}_A(-\omega) X(\omega) d\omega \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathbb{I}_A(\mu) X(\mu) d\mu + \int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \mathbb{I}_A(\mu) X(\mu) d\mu \right]$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{X(\omega) + X(-\omega)}{2} \mathbb{I}_A(\omega) d\omega = E\left(\mathbb{I}_A \frac{X(\cdot) + X(-\cdot)}{2}\right)$$

cambio variabili

(2) X, Y v.a. reali $X \rightarrow \mathbb{R}, Y \rightarrow \mathbb{R}^n$, (X, Y) ha densità congiunta $f_{(X,Y)}$

Voglio trovare $h(Y) = E(X|Y=Y)$

Deve succedere $E(\varphi(Y)X) = E(\varphi(Y)h(Y))$

dato che $\varphi(Y) = ?$ unis. elm. $\forall \varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ unis. elm.

$$\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} \varphi(y) x f_{X,Y}(x,y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) h(y) f_Y(y) dy$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \left\{ \int_{\mathbb{R}} x f_{X,Y}(x,y) dx \right\} dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) f_Y(y) h(y) dy$$

$$\Rightarrow h(y) = \frac{\int_{\mathbb{R}} x f_{X,Y}(x,y) dx}{f_Y(y)}$$

quando $= 0$ uno gli mette
un valore a caso (fatto 0)

def: Definisco $f_{X|Y=y}(x) = \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} & \text{se } f_Y(y) \neq 0 \\ \text{densità qualsiasi} & \text{se } f_Y(y) = 0 \end{cases}$ in x

$$E(X|Y=y) = \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y=y}(x) dx$$

Quindi abbiamo:

$$E(X|Y) = \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y=y}(x) dx \Big|_{Y=Y} \quad \leftarrow \text{e' solo una notazione strana}$$

OSS: $E(e(x)|Y=y) = \int_{\mathbb{R}} e(x) \underbrace{f_{X|Y=y}(x)}_{:=h(y)} dx$ con e \mathbb{R} -misurabile

Devo verificare che $E(\varphi(Y)e(X)) = E(h(Y)\varphi(Y))$

$$\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} \varphi(y) e(x) f_{X,Y}(x,y) dx dy \stackrel{\text{per Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \int_{\mathbb{R}} e(x) \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} dx f_Y(y) dy$$

ESERCIZIO: $f_{X|Y=y}(\cdot)$ è una densità $\forall y \in \mathbb{R}^n$

LEMMA (di FREEZING): $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $G \subset \mathcal{F}$. Sono $T: (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$

$X: (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (H, \mathcal{H})$ v.g.

Supponiamo che T sia G -misurabile e X indipendente da T .

Sia $\varphi: H \times E \rightarrow \mathbb{R}$ mis t.c. $\varphi(X,T) \in L^1$ o $\varphi \geq 0$ allora

$$\begin{aligned} E(\varphi(X,T) | G) &= E(\varphi(X,t)) \Big|_{t=T} \\ &= h(T) \quad \text{dove } h(t) = E(\varphi(X,t)) \end{aligned}$$

dim: sia Z G -mis, eliminata.

N.B: X indipen da (Z,T) $E(Z\varphi(X,T)) = ?$

$$\hookrightarrow \mathcal{L}_{(X,Z,T)} = \mathcal{L}_X \otimes \mathcal{L}_{(Z,T)}$$

$$\begin{aligned} E(Z\varphi(X,T)) &= \int_{H \times \mathbb{R} \times E} Z\varphi(x,t) \mathcal{L}_{(X,Z,T)}(dx, dz, dt) \\ &= \int_{H \times \mathbb{R} \times E} Z\varphi(x,t) (\mathcal{L}_X \otimes \mathcal{L}_{(Z,T)})(dx, dz, dt) \\ &= \int_{\mathbb{R} \times E} Z \left\{ \int_H \varphi(x,t) \mathcal{L}_X(dx) \right\} \mathcal{L}_{(Z,T)}(dz, dt) \\ &= \int_{\mathbb{R} \times E} Z E(\varphi(X,T)) \mathcal{L}_{Z,T}(dz, dt) \\ &= \int_{\mathbb{R} \times E} Z h(t) \mathcal{L}_{Z,T}(dz, dt) = E(h(T)Z) \end{aligned}$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{G\text{-mis.}}$

In particolare quando $G = \sigma(T)$ ho

$$E(\varphi(X, T) | T=t) = E(\varphi(X, t))$$

ESERCIZIO: X e $Y \sim N(0, 1)$ indipendenti

$$E(X | X+Y) = ?$$

(1) $T = X+Y$, (X, T) hanno densità congiunta (dato che \Rightarrow un vettore gaussiano)

$$(X, T) \sim N\left(0, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right) \quad T \sim N(0, 2)$$

$$f_{X|T=t} = \frac{f_{N(0, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix})}(x, t)}{f_{N(0, 2)}(t)} \dots$$

(2) Provo a usare il lemma di Freezing.

$X = aT + V$ con V indipendente da T e a costante $\in \mathbb{R}$

\uparrow provo con una comb. lineare perché così ho ancora un vettore gaussiano e mi piace

(T, V) è un vettore gaussiano centrato, voglio $\text{cov} = 0$

$$E(TV) = E([X - a(X+Y)](X+Y)) = 1 - a - a E(XY) \overset{E(XY)=0 \text{ perché indep.}}{=} 1 - 2a$$

$$\Rightarrow a = 1/2 \quad \text{dato che } E(T) = E(V) = 0 \Rightarrow E(T)V = 0$$

$$X = \frac{1}{2}(X+Y) + V \Rightarrow V = \frac{1}{2}(X-Y) \sim N(0, \frac{1}{2}) \quad \leftarrow \frac{1}{2}(1+1)$$

$$E(X | T=t) = E\left(\frac{1}{2}T + V | T=t\right) = \frac{1}{2}t + \underbrace{E(V | T=t)}_{= E(V) \text{ perché } V \text{ e } T \text{ indep.}} = \frac{1}{2}t$$

Se devo calcolare $E(\varphi(X) | T=t)$ allora

$$E(\varphi(X) | T=t) = E\left(\varphi\left(\frac{1}{2}T + V\right) | T=t\right) = E\left(\varphi\left(\frac{t}{2} + V\right)\right) =$$

$$V = \frac{1}{2}Z \text{ con } Z \sim N(0, 1)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}z\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$\Rightarrow f_{X|T=t} = f_{N(\frac{t}{2}, \frac{1}{2})} \quad (\text{verificare})$$

⑥

23/03/2012

ESERCIZIO: X, Y indep. $\text{Exp}(\lambda)$. $E(\text{Max}(X, Y) | X)$

lemma freezing: $E(\text{Max}(X, Y) | X=x) = E(\text{Max}(x, Y))$

$$= \int_0^{+\infty} \text{Max}(x, y) \lambda e^{-\lambda y} dy = \int_0^x x \lambda e^{-\lambda y} dy + \int_x^{+\infty} y \lambda e^{-\lambda y} dy$$

$$= x \left[-e^{-\lambda y} \right]_0^x + \left[-y e^{-\lambda y} \right]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} e^{-\lambda y} dy$$

$$= x \left[-e^{-\lambda x} + 1 \right] + \left[0 + x e^{-\lambda x} \right] + \left[\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda y} \right]_x^{+\infty} = x + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}$$

Dedurre da questo $E(\text{Max}(X, Y))$.

$$E(\text{Max}(X, Y)) = E(E(\text{Max}(X, Y) | X))$$

$$= E(E(\text{Max}(X, Y) | X=x))_{x=X}$$

$$= \int_0^{\infty} (x + \frac{1}{2} e^{-1x}) 1 e^{-1x} dx \quad \text{densità di } X$$

$$= \int_0^{\infty} 1x e^{-1x} dx + \int_0^{\infty} e^{-21x} dx$$

ESERCIZIO: $X, Y \sim P(\mu)$, $P(\mu)$ indipendenti

$$E(X | X+Y) = ?$$

Chiamo $N = X+Y$, $N \sim P(1+\mu)$

$$E(X | N=n) = E_{P(\cdot | N=n)}(X)$$

$$= \sum_{m=0}^n m P(X=m | N=n) = \sum_{m=0}^n m \frac{P(X=m, N=n)}{P(N=n)}$$

$$= \sum_{m=0}^n m \frac{P(X=m, Y=n-m)}{P(N=n)}$$

$$= \sum_{m=0}^n m \frac{1^m}{m!} e^{-1} \cdot \frac{\mu^{n-m}}{(n-m)!} e^{-\mu} \cdot \frac{n!}{(1+\mu)^n} e^{-1-\mu}$$

$$= \sum_{m=0}^n m \binom{n}{m} \left(\frac{1}{1+\mu}\right)^m \cdot \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{n-m} = n \left(\frac{1}{1+\mu}\right)$$

è la media di una binomiale con $p = \frac{1}{1+\mu}$

Osserviamo che

$$P(X=m | N=n) = P(Z=m) \quad \text{dove } Z \sim B(n, \frac{1}{1+\mu})$$

ESERCIZIO: X_1, \dots, X_n, \dots indep, id distribuite in \mathbb{Z}^d

$$S_0 = 0 \quad S_n = X_1 + \dots + X_n \quad (\text{catena di Markov})$$

$$G_n = \sigma(S_n, S_{n+1}, \dots)$$

$$E(X_1 | G_n) = ?$$

$$\text{Osserviamo che } E(X_1 | S_n, S_{n+1}, \dots) = E(X_1 | \sigma(S_n, X_{n+1}, \dots))$$

$$= E(X_1 | \sigma(\sigma(S_n), \sigma(X_{n+1}, \dots)))$$

$$= E(X_1 | S_n)$$

Osservazione chiave: sapendo S_n non ho nessun motivo di pensare che le X_i si comportino diversamente (per simmetria)
Vediamo più precisamente:

$$E(X_1 | S_n = s) = h(s), \text{ vogliamo mostrare che } E(X_2 | S_n = s) = h(s)$$

Segue dal fatto che $d_{(X_1, S_n)} = d_{(X_2, S_n)}$, infatti questo

$$\text{implica } \Rightarrow d_{(X_1, S_n)} = d_{(X_2, S_n)}$$

φ limitata misurabile,

$$E(\varphi(S_n) X_2) = E(\varphi(S_n) X_1) = E(\varphi(S_n) h(S_n))$$

$$\Rightarrow h(s) = E(X_2 | S_n = s)$$

Quindi abbiamo:

$$E(X_1 | S_n = s) = E(X_2 | S_n = s) = \dots = E(X_n | S_n = s)$$

dato che n $E(X_1 | S_n = s) = E(X_1 + \dots + X_n | S_n = s) = s$ mi dimentico che sono tutti uguali e uso linearità

$\Rightarrow E(X_1 | S_n = s) = \frac{s}{n}$

ESERCIZIO: Urna di Polya

ⓐ ⓑ

ogni volta ne estraggo 1 e ne metto dentro 2 dello stesso colore

All'istante n ho $n+2$ palline

$X_n = \#$ palline rosse $\Rightarrow X_0 = 1$

Posso descriverla come una catena di Markov non omogenea:

$$P_{i,i+1}^{(n)} = \frac{i}{n+2} \quad P_{i,i}^{(n)} = \frac{n+2-i}{n+2}$$

\downarrow
dipende da n

Vogliamo una descrizione più precisa.

Pseudo U_1, U_2, \dots indipendenti U_k uniforme in $\{1, \dots, k+1\}$

$X_{n+1} = X_n + I_{\{U_{n+1} \leq X_n\}}$ le palline rosse sono le prime, quindi se ho estratto un numero \leq delle palline rosse \Rightarrow ho estratto una pallina rossa \Rightarrow aumento di 1 il # di palline rosse

$\mathcal{F}_n = \sigma(\{U_1, \dots, U_n\})$, X_n è \mathcal{F}_n -misurabile e U_{n+1} è indipendente da X_n

$$\begin{aligned} E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) &= E(X_n + I_{\{U_{n+1} \leq X_n\}} | \mathcal{F}_n) = X_n + E(I_{\{U_{n+1} \leq k\}} |_{k=X_n}) \\ &\stackrel{!}{=} X_n + P(U_{n+1} \leq k) |_{k=X_n} \quad \text{perché } U_{n+1} \sim U(n+2) \\ &\stackrel{!}{=} X_n + \left(\frac{k}{n+2}\right) |_{k=X_n} = X_n + \frac{X_n}{n+2} = \left(\frac{n+3}{n+2}\right) X_n \end{aligned}$$

\uparrow lemma freezing

Ma definiamo $\hat{X}_n = \frac{X_n}{n+2}$ (perché è più interessante la %) linearity viene fuori

$$E(\hat{X}_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \frac{1}{n+3} E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \frac{1}{n+3} \cdot \frac{n+3}{n+2} \cdot X_n = \hat{X}_n$$

Questo mi dice che il gioco è onesto, ovvero la percentuale di palline rosse rimane sempre la stessa (più o meno)

\downarrow
non è la percentuale che rimane la stessa ma la legge della percentuale

ESERCIZIO: X v.a. ignota. Supponiamo di osservare il "fenomeno X " che però è affetto da rumore.

\Rightarrow In realtà non osservo X ma osservo: $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ v.a. indipendenti $\xi_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$

\downarrow rumore
 $(X + \xi_1, \dots, X + \xi_n)$
 $\underbrace{\hspace{1cm}}_{O_1} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{O_n}$

Il problema è trovare $E(X|O_1, \dots, O_n)$
(ovvero trovare un filtro per togliere il rumore)

Così com'è il problema è difficile, quindi per risolverlo supponiamo:

$X \sim N(0, \sigma^2)$ e ξ_i indipendenti da X .
e per comodità prendiamo $\sigma^2 = 1 \Rightarrow X \sim N(0, 1)$

Provo a scrivere:

$$X = a_1 O_1 + \dots + a_n O_n + V \quad \text{con } V \text{ indep. da } O_1, \dots, O_n$$

So che (X, ξ_1, \dots, ξ_n) è un vettore gaussiano centrato
e quindi anche (V, O_1, \dots, O_n) è vett. gauss. centrato

V indep. da $O_i \Rightarrow E(V O_i) = 0$

$$E\left(\left(X - \sum_{j=1}^n a_j O_j\right) O_i\right) = 0$$

$$= E\left(\left[X - \sum_{j=1}^n a_j (X + \xi_j)\right] [X + \xi_i]\right) = 0$$

$$= E\left(\left(1 - \sum_{j=1}^n a_j\right) X - \sum_{j=1}^n a_j \xi_j\right) [X + \xi_i]$$

perché $E(X \xi_j) = 0$
per indep.

$$= \left(1 - \sum_{j=1}^n a_j\right) - a_i \varepsilon_i^2 = 0$$

$$\Rightarrow a_i = \frac{1 - \sum_{j=1}^n a_j}{\varepsilon_i^2} \quad (*)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = \left(1 - \sum_{j=1}^n a_j\right) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\varepsilon_i^2}$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \left(1 + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^{-2}\right) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^{-2} \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i = \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^{-2}}{1 + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^{-2}}$$

$$(*) \Rightarrow a_i = \frac{\varepsilon_i^{-2}}{1 + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^{-2}}$$

$$E(X|O_1, \dots, O_n) = E(a_1 O_1 + \dots + a_n O_n + V | O_1, \dots, O_n)$$

linearità

$$= a_1 O_1 + \dots + a_n O_n + E(V | O_1, \dots, O_n)$$

" indep.
 $E(V) = 0$

$$(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P}) \xrightarrow{T} (E, \mathcal{E})$$

$$X \rightarrow (H, \mathcal{H}) \xrightarrow{p} (R, \mathcal{B}(R))$$

se $\mathbb{P}(T=t) \neq 0 \Rightarrow E(\varphi(X) | T=t) = E^{\mathbb{P} \cdot \mathbb{1}_{T=t}}(\varphi(X))$

Quindi $\forall A \in \mathcal{H}$:

$$E(I_A(X) | T=t) = \mathbb{P}(X \in A | T=t)$$

def: Se T è discreta a valori in $\{t_1, t_2, \dots\}$ posso definire:

$$\mathbb{P}(X \in A | T=t_i) =: V_{t_i}(A)$$

$\forall i$ $V_{t_i}(\cdot)$ è la legge di X rispetto a $\mathbb{P}(\cdot | T=t_i)$ ^{nuova probabilità!}

(1) $\Rightarrow V_{t_i}(\cdot)$ è una misura di probabilità su \mathcal{H} .

(2) L'applicazione $t_i \mapsto V_{t_i}(A)$ è misurabile $\forall A \in \mathcal{H}$ $\{t_1, t_2, \dots\} \rightarrow [0, 1]$ (in questo caso è ovvio dato che abbiamo un insieme discreto)

(3) $V_{t_i}(A) = \mathbb{P}(X \in A | T=t_i) = E(I_A(X) | T=t_i)$ o equivalentemente

$$V_{t_i}(A) \Big|_{T=t_i} = E(I_A(X) | T)$$

Sia ora T una v.c. generica (non discreta). Ho definito la funzione misurabile: $\forall A \in \mathcal{H}$

$$E(I_A(X) | T) = h(T)$$

$$h = E(I_A(X) | T=t)$$

(questa cosa viene dalla def di speranza condizionale)

1. So che $E(I_A(X) | T) \in [0, 1]$ \mathbb{P} -q.c. $\Leftrightarrow E(I_A(X) | T=t) \in [0, 1]$

a meno di un insieme di $\mathcal{L}_T = 0$ \star (= q.o. rispetto a \mathcal{L}_T per abbreviare dopo)

2. E' anche vero che se $A = \emptyset$: ($\mathbb{1}_\Omega = A$)

$$E(I_\emptyset(X) | T=t) = 0 \quad \text{e} \quad E(I_\Omega(X) | T=t) = 1 \quad \mathcal{L}_T\text{-q.o.}$$

3. A_1, A_2, \dots disgiunti. Allora:

$$E(I_{\bigcup_{n=1}^\infty A_n}(X) | T=t) = E\left(\sum_{n=1}^\infty I_{A_n}(X) | T=t\right)$$

$$= \sum_{n=1}^\infty E(I_{A_n}(X) | T=t) \quad \mathcal{L}_T\text{-q.o.} \quad \star$$

\rightarrow È NUMERICAMENTE ADDITIVA

Dato che vole 4,2,3 mi viene voglia di definire una nuova probabilità. Definisco:

$$V_t^X(A) = E(I_A(X) | T=t)$$

e ho definito $\forall t$ una probabilità su (H, \mathcal{H}) che è la legge di X condizionata a T .

però c'è qualcosa che NON funziona!

il problema sta qui \star . La numerabilità additiva, e lo stare in $[0, 1]$ dipendono dagli A_i cioè \mathcal{L}_T -q.c. dipende da A_1, A_2, \dots e se

successioni di A_1, A_2, \dots sono più che numerabili!

Quindi le proprietà non valgono per qualsiasi successione. Quindi devo procedere in un altro modo.

def: **NUCLEO di PROBABILITA'**: $\nu: E \times \mathcal{H} \rightarrow [0, 1]$ tale che

- 1) $\forall t \in E \quad A \mapsto \nu_t(A)$ probabilità su \mathcal{H}
- 2) $\forall A \in \mathcal{H} \quad t \mapsto \nu_t(A)$ è misurabile $(E, \mathcal{E}) \mapsto ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$

dico che un nucleo è una **VERSIONE REGOLARE** della probabilità condizionata di X rispetto a T se

$$\forall A \in \mathcal{H} \quad \nu_t(A) = E(1_A(X) | T=t) \quad \forall t \text{ a meno di un insieme di } \mathcal{L}_T = 0$$

Quero ho oltrepassato il problema imponendo che ν sia una probabilità. Ora bisognerebbe mostrare che la versione regolare esiste.

OSS: $\nu(\cdot)$ è vers. reg. della prob. cond. sse $\forall A$

$$\nu_t(A) \Big|_{t=T} = E(1_A(X) | T) \quad \text{P-q.c.}$$

TEO: Se (H, \mathcal{H}) è uno spazio polacco con la sua σ -algebra di Borel allora esiste sempre v.r. della prob. cond.

POLACCO = metrico, completo, separabile

OSS: ν v.r.p.c. di X rispetto a T . φ : mis. limitata $E \times H \rightarrow \mathbb{R}$ allora

$$E(\varphi(T, X) | T=t) = \int_H \varphi(t, x) \nu_t(dx)$$

dim: (1) se $\varphi(t, x) = I_B(t) I_A(x)$

$$E(\varphi(T, X) | T=t) = E(I_B(T) I_A(X) | T=t) = I_B(t) E(I_A(X) | T=t)$$

$$= I_B(t) \nu_t(A) = I_B(t) \int_H I_A(x) \nu_t(dx)$$

$$= \int_H \varphi(t, x) \nu_t(dx)$$

Quindi la formula è vera per le indicatori. $(I_{B \times A}, B \in \mathcal{E}, A \in \mathcal{H})$ la classe degli insiemi $C \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{H}$ per cui vale la formula è una σ -algebra.

\Rightarrow La formula vale perf. $I_C \quad \forall C \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{H}$

Per linearità allora vale per le funzioni semplici.

Poi posso passare con Beppo Levi a $\varphi \geq 0$ (dato che a sx ho una \mathbb{R} e a dx un \mathbb{N})

E poi posso scrivere $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$

OSS: ν v.r.p.c. sse $E(I_A(X) \varphi(T)) = E\left[\nu_t(A) \varphi(t) \Big|_{t=T}\right]$

$$= \int_E \nu_t(A) \varphi(t) \mathcal{L}_T(dt) = \int_E \int_H I_A(x) \nu_t(dx) \varphi(t) \mathcal{L}_T(dt)$$

ovvero $E(X | T) = L \Leftrightarrow E(X \varphi(T)) = E(L \varphi(T)) = E(h(t) \varphi(t) \Big|_{t=T})$ con $h(t) = L$

Infine otteniamo anche:

$$E(\varphi(X) \varphi(T)) = \int_E \left\{ \int_H \varphi(x) \nu_t(dx) \right\} \varphi(t) \mathcal{L}_T(dt)$$

In generale se $f: H \times E \rightarrow \mathbb{R}$ e t.c. $f(x, T) \in L^1$

$$\mathbb{E}(f(X, T)) = \int_H \left\{ \int_E f(t, x) \nu_t(dx) \right\} \mathcal{L}_T(dt)$$

(generalizzazione di Fubini-Tonelli o del lemma di Fubini, ma questa volta $\nu_t(dx)$ dipende da t)

CASI in cui POSSIAMO CALCOARE $\nu_t(\cdot)$

(1) X è indipendente da T

$$\mathbb{E}(I_A(X) \varphi(T)) = \underbrace{\mathbb{E}(I_A(X))}_{\mathcal{L}_X(A)} \underbrace{\mathbb{E}(\varphi(T))}_{\mathbb{E}(\varphi(t)|_{t=T})} = \mathbb{E}(\mathcal{L}_X(A) \varphi(t) |_{t=T})$$

cost. rispetto a t

$$\Rightarrow \nu_t(A) = \mathcal{L}_X(A) \Rightarrow \boxed{\nu_t = \mathcal{L}_X} \quad \forall t$$

Quindi X indep. da T , $\nu_t(A)$ non dipende da t

(2) $X = f(Y, T)$ con Y indep. da T . Y a valori in (G, \mathcal{G}) , f mis $G \times E \rightarrow H$

$$\mathbb{E}(\psi(f(Y, T)) \varphi(T)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\psi(\dots) | \mathcal{F}_T)) \stackrel{\text{Freezing}}{=} \mathbb{E}(\mathbb{E}(\psi(f(Y, t)) \varphi(t) |_{t=T}))$$

$$= \int_H \varphi(t) \left\{ \int_G \psi(f(Y, t)) \mathcal{L}_Y(dY) \right\} \mathcal{L}_T(dt)$$

$$= \int_E \psi(z) \mathcal{L}_{f(Y, t)}(dz)$$

$$\Rightarrow \boxed{\nu_t = \mathcal{L}_{f(Y, t)}}$$

(3) X e T a valori in \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^n e esiste $f_{X,T}$ densità congiunta

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\psi(X) \varphi(T)) &= \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \varphi(t) f_{X,T}(x, t) dx dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t) \left\{ \int_{\mathbb{R}^m} \psi(x) \underbrace{f_{X,T}(x, t)}_{f_T(t)} dx \right\} dt \cdot f_T(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int_{\mathbb{R}^m} \psi(x) \frac{f_{X,T}(x, t)}{f_T(t)} dx \right\} \varphi(t) f_T(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int_{\mathbb{R}^m} \psi(x) f_{X|T=t}(x) dx \right\} \varphi(t) \mathcal{L}_T(dt) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nu_t^{(dx)} = f_{X|T=t}(x) dx}$$

misura con densità $f_{X|T=t}$ rispetto a Lebesgue

(4) Se T è discreta e ha valori in $\{t_1, t_2, \dots\}$

$$\nu_{t_i}(A) = \mathbb{P}(X \in A | T = t_i)$$

ESERCIZIO: $X, Y \sim \text{Exp}(\lambda)$ indipendenti

$T = X + Y$. Calcolare v.r.p.c. di X rispetto a T

So che \exists densità congiunta di X, T , dato che \exists quella di X, Y e T è una trasformazione lineare di X, Y .

Inoltre so che $T \sim \Gamma(2, \lambda) \Rightarrow f_T(t) = \begin{cases} \lambda^2 \exp^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

$$(x, y) \xrightarrow{T} (x, x+y) \Rightarrow g^{-1}(x, t) = (x, t-x)$$

$$\text{Jac}(g^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det = 1$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda x} e^{-\lambda y} \mathbb{I}_{[0,+\infty)}(x) \mathbb{I}_{[0,+\infty)}(y)$$

$$f_{X,T}(x,t) = \lambda^2 e^{-\lambda x} e^{-\lambda(t-x)} \mathbb{I}_{[0,+\infty)}(x) \mathbb{I}_{[0,+\infty)}(t-x)$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda t}$$

per $x \geq 0$ e $t \geq x$

$$f_{X|T=t}(x) = \frac{f_{X,T}(x,t)}{f_T(t)} = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda t} \mathbb{I}_{[0,t]}(x) \mathbb{I}_{[0,+\infty)}(t)}{\lambda^2 e^{-\lambda t} t \mathbb{I}_{[0,+\infty)}(t)} = \frac{1}{t} \mathbb{I}_{[0,t]}(x)$$

$$V_t \sim \mathcal{U}([0,t]) \quad (\dots)$$

$$\text{OSS: } E(\varphi(X,T) | T=t) = \int_H \varphi(x) V_t(dx)$$

$$\Rightarrow E(X | T=t) = \int_H x V_t(dx)$$

$$(\dots) E(X | T=t) = \int_0^t \frac{x}{t} dx = \frac{t}{2}$$

ESERCIZIO: $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ indep.

$$T = X + Y$$

Calcolare v.r.p.c. di X sapendo T .

$$X = \frac{T+V}{2} \quad \text{con } V = X-Y, \text{ V indipendente da } T \quad \text{!}$$

$$\Rightarrow V \sim \mathcal{N}(0,2)$$

$$\Rightarrow X = f(V,T) \quad \text{con } V, T \text{ indep.}$$

$$V_t = \mathcal{L}_{f(V,T)} = \mathcal{N}\left(\frac{t}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{perché } T \text{ costante e poi ha } \frac{1}{2} \mathcal{N}(0,2) = \mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$$

ESERCIZIO: $(X,Y) \sim \mathcal{N}(0,Q)$ $Q > 0$

$$Q = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho \sigma_X \sigma_Y \\ \rho \sigma_X \sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix} \quad \rho \in [-1,1]$$

v.r.e.c di X rispetto a Y

$$\text{MODO 1: } f_{X|Y=t} = \frac{f_{X,Y}(x,t)}{f_Y(t)}$$

$$\text{MODO 2: } X = aY + W$$

con W gaussiano indep. da Y e $a \in \mathbb{R}$

\rightarrow basta vedere $\text{Cov} = 0$ perché X e W sono indipendenti